

## Le théorème de Whitney

Dans tout ce qui suit,  $\Omega$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $K$  un compact non vide de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définitions.** Un jet  $F$  sur  $K$  est la donnée d'une famille  $(F^{(J)})_{J \in \mathbb{N}^n}$  de fonctions continues sur  $K$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $K$  est inclus dans  $\Omega$  et si  $f \in C^\infty(\Omega)$ , alors  $(f|_K)^{(L)}_{L \in \mathbb{N}^n}$  est un jet.

L'application  $R_K : f \mapsto (f|_K)^{(L)}_{L \in \mathbb{N}^n}$  est appelée *l'application de restriction à  $K$* .

On s'intéresse au problème d'extension suivant : si  $F$  est un jet, existe-t-il une fonction  $f$ , de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ , telle que  $R_K(f) = F$  ? Bien sûr, on suppose que le jet vérifie les estimations de Taylor.

**Définitions.** Soient  $p \in \mathbb{N}$ ,  $J \in \mathbb{N}^n$  tels que  $|J| \leq p$  et  $(\zeta, x) \in K^2$ . On définit le *reste de Taylor*  $R_\zeta^{J,p} F(x)$  par

$$R_\zeta^{J,p} F(x) = F^{(J)}(x) - \sum_{K; |J+K| \leq p} \frac{1}{K!} (x - \zeta)^K F^{(J+K)}(\zeta).$$

On dit que  $F$  est un *jet de Whitney de classe  $C^\infty$  sur  $K$*  ou plus simplement un *jet de Whitney sur  $K$*  si, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et tout  $J \in \mathbb{N}^n$  tels que  $|J| \leq p$ , on a  $R_\zeta^{J,p} F(x) = o(|x - \zeta|^{p-j})$  dès que  $|x - \zeta|$  tend vers 0 avec  $(x, \zeta) \in K^2$ . On note  $C^\infty(K)$  l'ensemble des jets de Whitney.

Ainsi, un jet de Whitney est un jet qui se souvient qu'il est éventuellement le jet d'une fonction de classe  $C^\infty$ . On définit sur  $C^\infty(K)$  une famille de semi-normes  $(\|\cdot\|_p)_{p \in \mathbb{N}}$  en posant

$$\|F\|_p = \sup_{J \in \mathbb{N}^n; |J| \leq p; x \in K} |F^{(J)}(x)| + \sup_{\substack{J \in \mathbb{N}^n; |J| \leq p \\ (\zeta, x) \in K^2, \zeta \neq x}} \frac{|R_\zeta^{J,p} F(x)|}{|\zeta - x|^{p-j}}.$$

H. Whitney a montré que la condition nécessaire donnée ci-dessus est aussi suffisante.

**Théorème ([Wh]).** *Soit  $F$  un jet ;  $F$  est un jet de Whitney sur  $K$ , si et seulement si, il existe une fonction  $f$ , de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ , telle que  $F = R_K(f)$ .*